

## Integrasi Numeris dengan Menggunakan Polinomial *Lagrange*

Syawaluddin H<sup>1)</sup>  
Hang Tuah<sup>2)</sup>  
Widiadnyana Merati<sup>2)</sup>  
Leo Wiryanto<sup>2)</sup>

**Abstrak**

*Pada paper ini disajikan pengembangan integrasi numeris berdasarkan polinomial Lagrange. Metoda yang dihasilkan mirip dengan metoda Gaussian-quadrature, dengan perbedaan terletak pada pengambilan titik-titik integrasi. Metoda memberikan hasil integrasi yang sangat baik, dengan kesalahan sebesar 0.2% -0.5% pada integrasi fungsi sinusoidal. Metoda yang dihasilkan juga dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial waktu orde 1 dengan hasil yang sangat baik.*

**Kata-kata kunci :** Polinomial lagrange.

**Abstract**

*In this paper, a development of a numerical integration method based on Lagrangian polynomial is presented. The resulted method like Gaussian-quadrature's method, but differs in points of integration sampling. The method gives a very good result in integration of sinusoidal function, with error about 0.2% - 0.5% to exact solution. The method can also be used for solving first order time differential equation, with very good result.*

**Keywords :** Lagrange polynomial.

### 1. Latar Belakang

Metoda integrasi numeris sudah cukup banyak yang dikembangkan, mulai metoda trapezoidal sampai dengan Gaussian-quadrature. Dari semua metoda yang ada yang paling mudah pemakaiannya dan memberikan hasil yang cukup baik adalah metoda Gaussian-quadrature.

Pada paper ini dikembangkan alternatif metoda integrasi tanpa bermaksud meneliti kelebihan ataupun kekurangan metoda Gaussian-quadrature. Metoda integrasi yang dikembangkan adalah berdasarkan fakta bahwa suatu fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk lain yang lebih sederhana yaitu dengan polinomial *Lagrange*. Mengingat bentuk polinomial *Lagrange* adalah tetap pada suatu jumlah titik polinomial, maka bila polinomial tersebut dikerjakan pada sistim koordinat kurvilinier dengan domain yang tetap  $-1 \leq \xi \leq 1$ , maka integrasi polinomial tersebut akan menghasilkan harga yang tetap, yang selanjutnya akan disebut dengan koefisien integrasi.

### 2. Polinomial *Lagrange*

Pada pasangan data  $(f_i, x_i)$ ,  $i = 1, n$ ,  $f$  dapat didekati dengan polinomial *Lagrange*. Adapun bentuk pendekatan tersebut adalah [Burden, Douglas, 1985]

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f_i \tag{2.1}$$

dimana :  $L_i(x)$  adalah polinomial *Lagrange* dengan bentuk

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)(x_i - x_3) \dots (x_i - x_n)}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{2.2}$$

Dengan demikian integrasi suatu

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_j) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_j) \dots (x_i - x_n)}$$

1. Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil FTSP-ITB.  
2. Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil FTSP-ITB.  
2. Staf Pengajar Departemen Teknik Sipil FTSP-ITB.  
2. Staf Pengajar Departemen Matematika FMIPA-ITB.

fungsi  $F(x)$ , dimana integrasi secara analitik tidak dimungkinkan maka dapat dilakukan langkah berikut. Berdasarkan fungsi  $F(x)$  yang diketahui dapat dibuat pasangan data  $\{F_i, x_i\}$ ,  $i = 1, n$ , pada  $a \leq x_i \leq b$ , dimana  $a$  dan  $b$  adalah batas-batas integrasi. Langkah berikutnya adalah mendekati  $F(x)$  dengan polinomial *Lagrange* menggunakan data set  $\{F_i, x_i\}$ .

$$F(x) = f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x_i) F_i \tag{2.3}$$

Sedangkan integrasi menjadi

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n L_i(x) F_i dx \tag{2.4}$$

integrasi pada **Persamaan (2.4)** dapat dengan mudah diselesaikan mengingat  $L_i(x)$  berbentuk polinomial. Pada sistim koordinat  $\xi$ , polinomial *Lagrange* berbentuk

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F(\xi_i) \tag{2.5}$$

sedangkan integrasinya menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi &= \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F(\xi_i), \text{ atau} \\ \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi &= \int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi F(\xi_1) + \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi F(\xi_2) + \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi F(\xi_3) \\ &\quad + \int_{-1}^1 L_n(\xi) d\xi F(\xi_n) \end{aligned}$$

### 3. Pembentukan Koefisien Integrasi

Meskipun integrasi polinomial dapat dengan mudah dilakukan, penggunaan **Persamaan (2.4)** untuk menghitung integrasi suatu fungsi masih kurang praktis, karena setiap kali harus membentuk polinomial *Lagrange* dan mengintegrasikannya. Bila segmen garis  $a \leq x_i \leq b$ , ditransformasikan ke sistem koordinat kurvilinier ( $\xi$ ), dengan interval  $-1 \leq \xi \leq 1$ , maka fungsi transformasi adalah

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \\ dx &= \frac{b-a}{2} d\xi \end{aligned} \tag{3.1}$$

Selanjutnya fungsi  $F(x)$ , didekati dengan polinomial

*Lagrange* dalam system koordinat  $\xi$ , yaitu

$$F(x) = \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i \tag{3.2}$$

Integrasi  $F(x)$  menjadi

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i d\xi \tag{3.3}$$

Integrasi  $\int_{-1}^1 L_i(\xi) d\xi$  dapat dengan mudah

diselesaikan dan mempunyai harga yang tetap, misal  $C_i$ , maka **Persamaan (3.3)** menjadi

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n C_i F_i \tag{3.4}$$

dimana :

$$C_i = \int_{-1}^1 L_i(\xi) d\xi$$

Untuk menambah ketelitian, dapat saja interval  $(a, b)$  dibagi-bagi lagi dalam sejumlah sub interval, hal ini mengingat bahwa

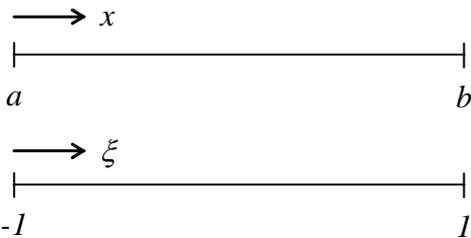
$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^{a_1} F(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} F(x) dx + \dots + \int_{a_m}^b F(x) dx$$

dimana  $a < a_1 < a_2 < \dots < a_m < b$ , atau penjelasan dengan sket



Integrasi numeris dikerjakan pada masing-masing segmen, yaitu

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \frac{a_1-a}{2} \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i + \frac{a_2-a_1}{2} \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i + \dots \\ &\quad + \frac{b-a_m}{2} \sum_{i=1}^n L_i(\xi) F_i \end{aligned} \tag{3.5}$$

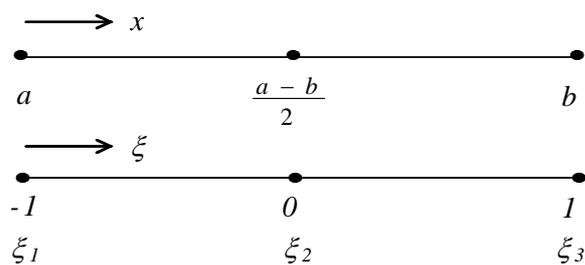


**Gambar 3.1. Transformasi sistem koordinat x ke sistem koordinat  $\xi$**

Jumlah titik polinomial pada suatu segmen ataupun sub-segmen dapat digunakan 2, 3, 4 ..... n titik polinomial, dimana semakin banyak titik polinomial, akan semakin kecil kesalahannya. Tetapi pada umumnya cukup digunakan polinomial *Lagrange* dengan 3 - 5 titik polinomial. Perhitungan koefisien integrasi dengan 3, 4 dan 5 titik polinomial akan dijelaskan pada bagian berikut.

**a. Integrasi dengan 3 titik polinomial**

Pada skema ini interval garis *a - b* dibagi dalam 2 interval, yaitu seperti terlihat pada gambar berikut



**Gambar 3.2. Integrasi dengan 3 titik polinomial**

Dengan 3 titik polinomial atau titik integrasi tersebut, polinomial *Lagrange* akan berbentuk

$$L_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = -\xi(\xi - 1) \quad (3.6)$$

Dengan memasukkan harga  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$ , dan  $\xi_3 = 1$ , **Persamaan (3.6)** menjadi

$$L_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (1 - \xi^2) \quad (3.7)$$

$$L_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \xi(\xi + 1) \quad (3.8)$$

Dengan demikian diperoleh koefisien integrasi yaitu

$$C_1 = \int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} \xi(\xi - 1) d\xi = \frac{1}{3}$$

$$C_2 = \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) d\xi = \frac{4}{3}$$

$$C_3 = \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) d\xi = \frac{1}{3}$$

Contoh (1) aplikasi integrasi dengan 3 titik polinomial

pada fungsi sinusoidal  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Penyelesaian :  $x = 0 \quad F_1 = 0; \quad x = \frac{\pi}{4} \quad F_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

;  $x = \frac{\pi}{2} \quad F_3 = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} (C_1 F_1 + C_2 F_2 + C_3 F_3) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left( \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 1.002280 \quad \text{Hasil eksak dari } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \text{ terlihat hasil numeris}$$

sangat dekat dengan hasil eksak, dengan kesalahan  $|1 - 1.002280|100\% = 0.28\%$ . Bila (b-a) terlalu besar, maka dapat dibagi lagi dalam sejumlah sub segmen, dan selanjutnya integrasi dilakukan dalam masing-masing sub-segmen yaitu, misal untuk pembagian dalam 2 sub-segmen, integrasi menjadi

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^{\frac{b-a}{2}} F(x) dx + \int_{\frac{b-a}{2}}^b F(x) dx =$$

$$\frac{b-a}{4} \sum_{i=1}^3 C_i F_i + \frac{b-a}{4} \sum_{i=1}^3 C_i F_i$$

**b. Integrasi dengan 4 titik polinomial**

Pada skema ini interval garis *a - b* dibagi dalam 3 interval, yaitu



**Gambar 3.3. Integrasi dengan 4 titik polinomial**

Dengan 4 titik polinomial ini, maka polinomial *Lagrange* berbentuk

$$L_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)} \quad (3.9a)$$

$$L_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} \quad (3.9b)$$

$$L_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)} \quad (3.9c)$$

$$L_4(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)} \quad (3.9d)$$

Dengan memasukkan harga-harga  $\xi_1$  s/d  $\xi_4$  seperti pada **Gambar (3.3)** dan dengan mengintegrasikan dari  $-1$  dan ke  $1$ , maka diperoleh

$$C_1 = \int_{-1}^1 L_1(\xi) d\xi = 0.25; C_2 = \int_{-1}^1 L_2(\xi) d\xi = 0.75$$

$$C_3 = \int_{-1}^1 L_3(\xi) d\xi = 0.75; C_4 = \int_{-1}^1 L_4(\xi) d\xi = 0.25$$

Contoh (2) integrasi fungsi sinusoidal  $\sin x dx$ , dengan 4 titik integrasi



$$x = 0 \quad F_1 = \sin 0 = 0.000000; \quad x = \frac{\pi}{6} \quad F_2 = \sin \frac{\pi}{6} = 0.500000$$

$$x = F_3 = \sin = \frac{\pi}{3} \quad 0.866025; \quad x = \frac{\pi}{2} \quad F_4 = \sin = \frac{\pi}{2} = 1.000000$$

$$\int_{-1}^1 F(x) dx = \frac{\pi}{4} (C_1 F_1 + C_2 F_2 + C_3 F_3 + C_4 F_4)$$

$$= \frac{\pi}{4} (0.25 \cdot 0.000000 + 0.75 \cdot 0.500000 + 0.75 \cdot 0.866025 + 0.25 \cdot 1.000000)$$

$$= 1.001005 \quad \text{Kesalahan terhadap hasil eksak adalah } |1 - 1.001005|100\% = 0.1005\%.$$

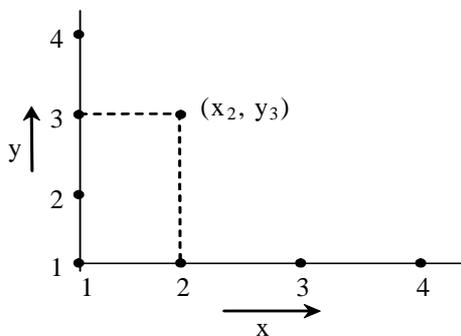
#### 4. Integrasi Bidang

Berdasarkan [Burden, Douglas, 1985], suatu fungsi bidang  $F(x, y)$  dapat didekati dengan perkalian polinomial Lagrange, yaitu

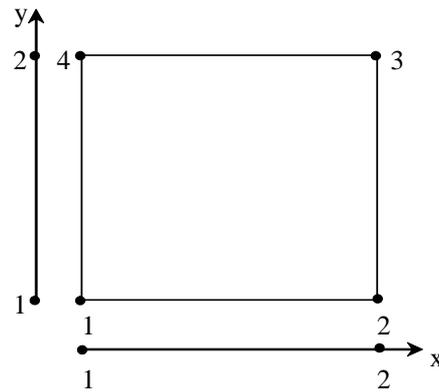
Pada titik  $(x_2, y_3)$  pada **Gambar (4.1)**,  

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_i(x) L_j(y) F(x_i, y_j) \quad (4.1)$$

maka polinomial Lagrange-nya adalah  $L_{2,3}(x, y) = L_2(x) L_3(y)$



Gambar 4.1. Polinomial Lagrange pada bidang



Gambar 4.2. Polinomial Lagrange pada bidang segi-empat

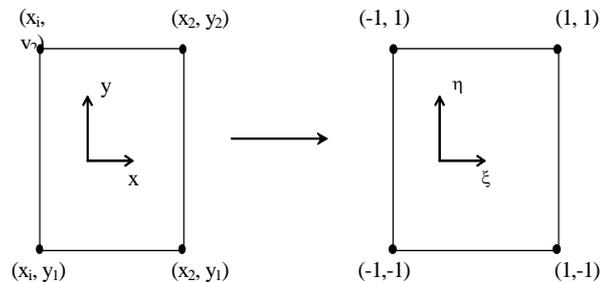
Dengan demikian untuk bidang segi empat seperti fungsi pada **Gambar (4.2)**, maka

$$L_1(x, y) = L_1(x) L_1(y); \quad L_2(x, y) = L_2(x) L_1(y)$$

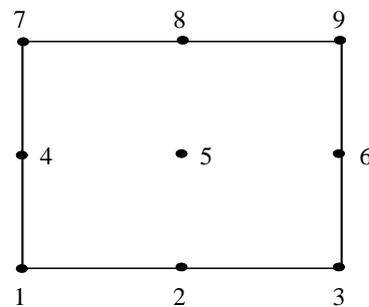
$$L_3(x, y) = L_2(x) L_2(y); \quad L_4(x, y) = L_1(x) L_2(y)$$

Sebagaimana halnya dengan domain satu dimensi, maka pada domain dua dimensi ini juga akan lebih mudah bila digunakan sistem koordinat kurvilinier  $(\xi, \eta)$ .

Bila digunakan polinomial Lagrange dengan 3 titik polinomial, baik pada arah  $\xi$  maupun  $\eta$ , akan didapat polinomial Lagrange dengan titik-titik polinomial



Gambar 4.3 Transformasi dari bidang (x,y) ke bidang  $\xi, \eta$



Gambar 4.4 Titik-titik polinomial untuk polinomial Lagrange 3 titik

sebagai berikut (**Gambar 4.4**)

Pada arah horizontal, arah  $\xi$ , terdapat 3 polinomial  $L(\xi)$  dan pada arah  $\eta$  juga terdapat 3 buah  $L(\eta)$

$$L_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1) \quad L_1(\eta) = \frac{1}{2} \eta(\eta - 1)$$

$$L_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad L_2(\eta) = (1 - \eta^2)$$

$$L_3(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) \quad L_3(\eta) = \frac{1}{2} \eta(\eta + 1)$$

berdasarkan **Persamaan (3.7)**, **(3.8)**, dan **(3.9)** maka

Dengan demikian polinomial *Lagrange* pada titik-titik polinomial seperti terlihat pada **Gambar 4.4** adalah

$$L_1(\xi, \eta) = L_1(\xi) L_1(\eta); L_2(\xi, \eta) = L_2(\xi) L_1(\eta)$$

$$L_3(\xi, \eta) = L_3(\xi) L_1(\eta); L_4(\xi, \eta) = L_1(\xi) L_2(\eta)$$

$$L_5(\xi, \eta) = L_2(\xi) L_2(\eta); L_6(\xi, \eta) = L_3(\xi) L_2(\eta)$$

$$C_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_1(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9} \begin{matrix} L_7(\xi, \eta) = L_1(\xi) \\ L_3(\eta) \\ L_8(\xi, \eta) = \\ L_2(\xi) L_3(\eta) \end{matrix}$$

$$; C_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_2(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{4}{9} \begin{matrix} L_9(\xi, \eta) = L_3(\xi) \\ L_3(\eta) \end{matrix}$$

$$C_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_3(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9} \begin{matrix} \text{K o e f i s i e n} \\ \text{integrasi dapat} \\ \text{diperoleh dengan} \end{matrix}$$

$$; C_4 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_4(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{4}{9} \begin{matrix} \text{mengintegrasikan} \\ L_i(\xi, \eta) \text{ pada} \\ \text{Persamaan} \end{matrix}$$

$$C_5 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_5(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{16}{9} \begin{matrix} \text{sampai} \\ \text{dengan} \end{matrix} \text{ (4.1a) dan (4.1i)}$$

$$; C_6 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_6(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{4}{9}$$

$$C_7 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_7(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9}$$

$$; C_8 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_8(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{4}{9}$$

$$C_9 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_9(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9}$$

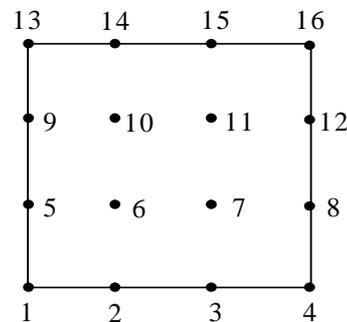
$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} F_9(x) dx dy = \frac{x_2 - x_1}{2} \frac{y_2 - y_1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^9 L_i(\xi, \eta) F_i d\xi d\eta$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{2} \frac{y_2 - y_1}{2} \sum_{i=1}^9 C_i F_i \quad (4.2)$$

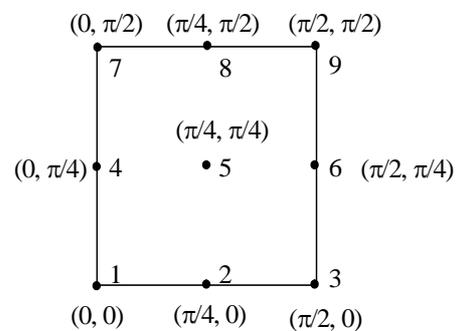
dimana  $dx = \frac{x_2 - x_1}{2} d\xi$  dan  $dy = \frac{y_2 - y_1}{2} d\eta$ .

Dengan menggunakan koefisien-koefisien integrasi tersebut maka integrasi pada domain bidang dapat dengan mudah diselesaikan, yaitu sebagai berikut

Dengan cara yang sama, dapat diturunkan koefisien integrasi untuk polinomial *Lagrange* 4 titik polinomial,  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1$  sehingga pada bidang integrasi akan terdapat 16 titik



**Gambar 4.5. Bidang integrasi dengan 16 titik polinomial**



**Gambar 4.6. Koordinat 9 titik polinomial**

polinomial seperti terlihat pada Gambar (4.5).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin y \, dy \, dx = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1$$

$$L_i(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi = \frac{\pi^2}{16} \sum_{i=1}^9 C_i F_i$$

Selanjutnya dengan mengintegrasikan masing-masing suku pada polinomial Lagrange akan diperoleh harga koefisien integrasi sebagai berikut

$$C_1 = 0.0625 ; C_2 = 0.1875 ; C_3 = 0.1875 ; C_4 = 0.0625$$

$$C_5 = 0.1875 ; C_6 = 0.5625 ; C_7 = 0.5625 ; C_8 = 0.1875$$

$$C_9 = 0.1875 ; C_{10} = 0.5625 ; C_{11} = 0.5625 ; C_{12} = 0.1875$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin y \, dy \, dx = \frac{\pi^2}{16} \sum_{i=1}^{16} C_i F_i \quad C_{13} = 0.0625 ; C_{14} = 0.1875 ; C_{15} = 0.1875 ; C_{16} = 0.0625$$

Contoh (4) : integrasi fungsi sinusoidal  $\sin x \sin y \, dx$

Tabel 4.1. Perhitungan contoh (4) dengan 9 titik polinomial

Titik	x	y	sin x <sub>i</sub>	sin y <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>	C <sub>i</sub>	C <sub>i</sub> F <sub>i</sub>
1	0	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.111111	0.000000
2	π/4	0	0.000000	0.707107	0.000000	0.444444	0.000000
3	π/2	0	0.000000	1.000000	0.000000	0.111111	0.000000
4	0	π/4	0.707107	0.000000	0.000000	0.444444	0.000000
5	π/4	π/4	0.707107	0.707107	0.500000	1.777778	0.888889
6	π/2	π/4	0.707107	1.000000	0.707107	0.444444	0.314270
7	0	π/2	1.000000	0.000000	0.000000	0.111111	0.000000
8	π/4	π/2	1.000000	0.707107	0.707107	0.444444	0.314270
9	π/2	π/2	1.000000	1.000000	1.000000	0.111111	0.111111
							1.004565

Catatan : F<sub>i</sub> = sin x<sub>i</sub> sin y<sub>i</sub>

Tabel 4.2. Perhitungan contoh (4) dengan 16 titik polinomial

Titik	x	y	sin x <sub>i</sub>	sin y <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>	C <sub>i</sub>	C <sub>i</sub> F <sub>i</sub>
1	0	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.062500	0.000000
2	π/6	0	0.500000	0.000000	0.000000	0.187500	0.000000
3	π/3	0	0.866025	0.000000	0.000000	0.187500	0.000000
4	π/2	0	1.000000	0.000000	0.000000	0.062500	0.000000
5	0	π/6	0.000000	0.500000	0.000000	0.187500	0.000000
6	π/6	π/6	0.500000	0.500000	0.250000	0.562500	0.140625
7	π/3	π/6	0.866025	0.500000	0.433013	0.562500	0.243570
8	π/2	π/6	1.000000	0.500000	0.500000	0.187500	0.093750
9	0	π/3	0.000000	0.866025	0.000000	0.187500	0.000000
10	π/6	π/3	0.500000	0.866025	0.433013	0.562500	0.243570
11	π/3	π/3	0.866025	0.866025	0.750000	0.562500	0.421875
12	π/3	π/3	1.000000	0.866025	0.866025	0.187500	0.162380
13	π/2	π/3	0.000000	1.000000	0.000000	0.062500	0.000000
14	0	π/2	0.500000	1.000000	0.500000	0.187500	0.093750
15	π/6	π/2	0.866025	1.000000	0.866025	0.187500	0.162380
16	π/3	π/2	1.000000	1.000000	1.000000	0.062500	0.062500
							1.002011

Catatan : F<sub>i</sub> = sin x<sub>i</sub> sin y<sub>i</sub>

dy, dengan 9 dan 16 titik integrasi

a. Perhitungan dengan 9 titik polinomial

$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$  dimana  $F_i = \sin x_i \sin y_i$ . Dengan hasil eksak 1.0, maka kesalahan metoda numeris adalah  $|1.004565 - 1| 100\% = 0.4565\%$ . Selanjutnya hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 4.1.

b. Perhitungan dengan 16 titik integrasi

Adapun hasil perhitungan disajikan pada Tabel 4.2 di bawah

Dengan hasil eksak 1.0, maka kesalahan metoda numeris adalah  $|1.002011 - 1| 100\% = 0.2011\%$ .

5. Penggunaan pada Penyelesaian Persamaan Differensial Waktu Orde 1 Nonlinier

Persamaan differensial waktu nonlinier orde 1, dapat ditulis dengan bentuk umum sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u^t) \quad (5.2a)$$

Penyelesaian secara *explicit* adalah dengan mengerjakan **Persamaan (5.1)** pada saat  $t = t$ . Jadi  $u^{t+\delta t}$  hanya ditentukan oleh kondisi  $F(u^t)$  saja.

Penyelesaian secara *implisit* adalah dengan mengerjakan **Persamaan (5.1)** pada saat  $t = t + \delta t$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u^{t+\delta t}) \quad (5.2b)$$

Dalam hal ini harga  $u^{t+\delta t}$  ditentukan oleh  $F(u^{t+\delta t})$ . Jadi baik metoda *explicit* maupun metoda *implisit* terdapat suatu kekurangan, dimana seharusnya harga  $u^{t+\delta t}$  ditentukan oleh  $F(u^t)$  dan  $F(u^{t+\delta t})$ . Untuk mengatasi kekurangan atau kelemahan dari metoda *explicit* dan *implisit* maka dikerjakan metoda prediktor korektor, yaitu

**a. Prediktor**

$\partial u / \partial \tau$  dapat dinyatakan dengan skema *forward* maupun *central difference*. Dengan **Persamaan (5.2a)** tersebut akan diperoleh harga  $u^{t+\delta t}$ . Bila diselesaikan dengan *central difference*, maka **Persamaan (5.2a)** menjadi

**b. Korektor**

Dengan harga  $u^{t+\delta t} = u_{pred}$  (hasil langkah prediktor), dikerjakan skema *implisit* yaitu

$$\int_{t_0}^{t+\delta t} du = \int_{t_0}^{t+\delta t} F(u) dt$$

Bila diselesaikan dengan *backward difference*, maka **Persamaan (5.4)**

**(5.2b)** menjadi

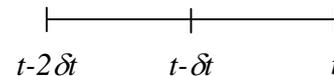
$$\int_{t_0}^{t+\delta t} F(u)$$

Dengan menggunakan skema *backward difference* pada  $\partial u / \partial \tau$ , maka akan diperoleh harga  $u^{t+\delta t}$  Selanjutnya harga  $u^{t+\delta t}$  adalah

$$u^{t+\delta t} = u^{t_0} + \int_{t_0}^t F(u) dt \quad (5.5)$$

**(5.2c)**

Dengan harga  $u^{t+\delta t}$  yang baru tersebut, diulang langkah korektor, yaitu dengan



**Gambar 5.1. Integrasi dengan 3 titik polinomial**

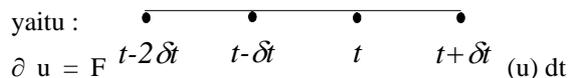
mengerjakan **Persamaan (5.2b)** dan **(5.2c)** lagi. Langkah ini diulang-ulang sampai diperoleh harga  $u^{t+\delta t}$  yang konvergen, dimana

$$u_{pred}^{t+\delta t} = u^{t-2\delta t} + \delta t \left( \frac{1}{3} F^{t-2\delta t} + \frac{4}{3} F^{t-\delta t} + \frac{1}{3} F^t \right) \quad (5.6)$$

harga  $\delta t$  diperoleh dari  $\frac{b-a}{2} = \frac{t-(t-2\delta t)}{2} = \delta t$

dimana  $\epsilon$  adalah bilangan yang sangat kecil.

Metoda prediktor korektor ini, dapat juga dikerjakan dengan cara integrasi yaitu sebagai berikut. **Persamaan (5.1)** dapat juga ditulis dalam bentuk lain yaitu:



**Gambar 5.2. Integrasi dengan 4 titik polinomial**

$$(5.3)$$

**Persamaan (5.3)** ini dapat diselesaikan dengan metoda integrasi yaitu

$$u^{t+\delta t} = \frac{3}{2} u^{t-2\delta t} + \delta t (0.25 F^{t-2\delta t} + 0.75 F^{t-\delta t} + 0.75 F^t + 0.25 F^{t+\delta t}) \quad (5.7)$$

harga  $\delta t$  diperoleh dari  $\frac{3}{2} \frac{b-a}{2} = \frac{t+\delta t-(t-2\delta t)}{2} = \frac{3}{2} \delta t$

Pada **Persamaan (5.4)** tersebut tidak dapat diselesaikan karena harga  $u^{t+\delta t}$  tidak diketahui. Untuk mengatasi hal tersebut, maka dikerjakan metoda prediktor-korektor, sebagai berikut :

**a. Prediktor**

Sebagai langkah prediktor adalah

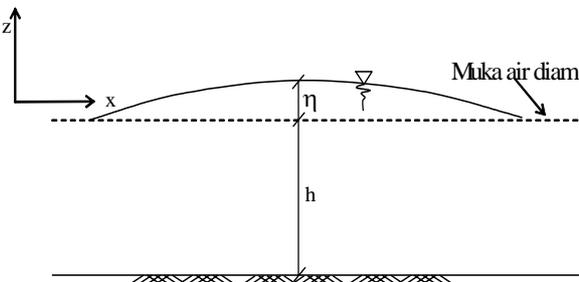
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = 0 \tag{5.8a}$$

**Integrasi (5.5)** dapat diselesaikan dengan polinomial Lagrange 3 titik, yaitu berdasarkan **Gambar 5.1**, dimana  $t_0 = t - 2\delta t$ .

Dengan diketahuinya  $u^{t-2\delta t}$ ,  $u^{t-\delta t}$  dan  $u^t$  dari perhitungan sebelumnya, maka dapat dihitung  $F^{t-2\delta t} = F(u^{t-2\delta t})$ ,  $F^{t-\delta t} = F(u^{t-\delta t})$  dan  $F^t = F(u^t)$ , dan  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial (uH)}{\partial x}$  atau **Persamaan (5.5)** dapat diselesaikan secara numeris dengan koefisien integrasi seperti **Persamaan (5.9a)** yang disebutkan pada terdahulu. dimana  $F(u, H) = -\frac{\partial (uH)}{\partial x}$

**b. Korektor**

Dengan diketahuinya harga  $\frac{\partial u}{\partial t} = G(u, \eta)$  maka dapat dihitung  $F^{t+\delta t} = F(u^{t+\delta t})$  dan **Persamaan (5.5)** dapat diselesaikan secara numeris



**Gambar 5.3. Variabel pada persamaan gelombang Airy**

dengan skema 4 titik.

$$\int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} \partial n = \int_{t-2\delta t}^t F(u, H) dt + \delta t F^t$$

Dengan menggunakan

$$\eta^{t+\delta t} = \eta^{t-2\delta t} + \delta t \left( \frac{1}{3} F^{t-2\delta t} + \frac{4}{3} F^{t-\delta t} + \frac{1}{3} F^t \right) + \delta t F^t$$

koefisien

$$F^{t-2\delta t} = -\frac{\partial (uH)^{t-2\delta t}}{\partial x}; F^{t-\delta t} = -\frac{\partial (uH)^{t-\delta t}}{\partial x}; F^t = -\frac{\partial (uH)^t}{\partial x}$$

integrasi dari bab terdahulu, maka penyelesaian numeris dari **Persamaan (5.6)** adalah sebagai berikut

$$\int_{t-2\delta t}^{t+\delta t} \partial u = \int_{t-2\delta t}^t G(u, \eta) dt + \delta t G^t$$

Dengan  $u^{t+\delta t}$  yang baru,  $G^{t-2\delta t} = \left( -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{t-2\delta t}$ ;  $G^{t-\delta t} = \left( -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{t-\delta t}$ ;  $G^t = \left( -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^t$  diulang perhitungan korektor **Persamaan 5.7**, sampai dicapai konvergensi dimana:

Sebagai contoh pemakaian akan diselesaikan persamaan gelombang Airy satu dimensi, yaitu [Dean, Dalrymple] :

$$\eta^{t+\delta t} = \eta^{t-2\delta t} + \frac{3}{2} \delta t (0,25 F^{t-2\delta t} + 0,75 F^{t-\delta t} + 0,75 F^t + 0,25 F^{t+\delta t})$$

$$F^{t+\delta t} = -\frac{\partial (uH)^{t+\delta t}}{\partial t}$$

**a. Persamaan kontinuitas**

**b. Persamaan momentum**

$$u^{t+\delta t} = u^{t-2\delta t} + \frac{3}{2} \delta t (0,25 G^{t-2\delta t} + 0,75 G^{t-\delta t} + 0,75 G^t + 0,25 G^{t+\delta t})$$

dimana  $G^{t+\delta t} = \left( -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{t+\delta t}$   $\eta$  = fluktuasi muka air

$u$  = kecepatan arus pada arah x

$h$  = kedalaman perairan

Hutahaean, dkk.

$g$  = percepatan gravitasi

$H = h + \eta$

Persamaan kontinuitas dapat ditulis

Sedangkan persamaan momentum dapat ditulis dalam bentuk

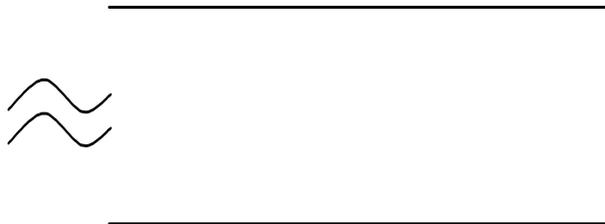
**a. Prediktor**

**a.1. Persamaan kontinuitas**

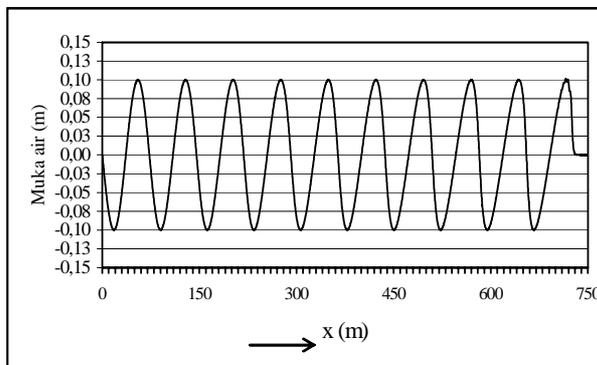
dimana

$(u, H)^{t-2\delta t}$ ,  $(u, H)^{t-\delta t}$ , dan  $(u, H)^t$ , diperoleh dari perhitungan sebelumnya. Sedangkan pada penelitian ini dihitung dengan menggunakan metoda selisih hingga.

**a.2. Persamaan momentum**



**Gambar 5.3. Kanal untuk eksekusi model**



**Gambar 5.4. Gelombang sinusoidal pada kanal, hasil simulasi**

dimana

$u^{t-2\delta t}$ ,  $\eta^{t-2\delta t}$ ,  $u^{t-\delta t}$ ,  $\eta^{t-\delta t}$ ,  $u^t$  dan  $\eta^t$  diperoleh dari hasil perhitungan sebelumnya. Sedangkan  $\partial u/\partial x$  dan  $\partial \eta/\partial x$  pada penelitian ini dihitung dengan metoda selisih hingga.

**b. Korektor**

**b.1. Persamaan kontinuitas**

dimana  $u^{t-\delta t}$  dan  $\eta^{t-\delta t}$  diperoleh dari perhitungan tahap prediktor.

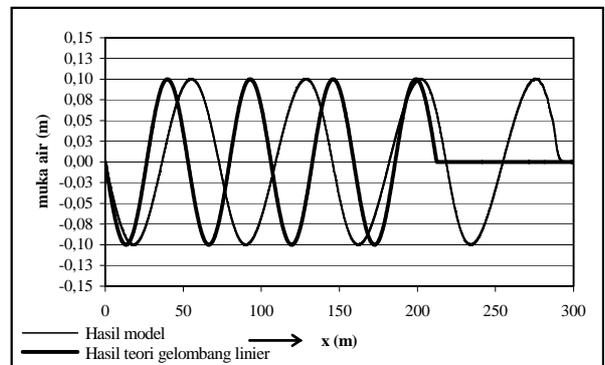
$$\int_{-l}^l f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i^*)$$

**b.2. Persamaan momentum**

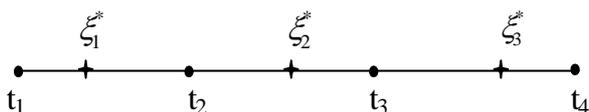
sedangkan  $u^{t+\delta t}$  dan  $\eta^{t+\delta t}$  diperoleh dari perhitungan pada tahap prediktor.

Sebagai contoh perhitungan, model dikerjakan pada perhitungan gelombang pada kanal (**Gambar 5.3**). Periode gelombang 6 detik, amplitudo 0.1 m, sedangkan kedalaman kanal  $h = 15.0$  m. Berdasarkan kajian Le Mehaute [Mei, Méhauté, 1966], persamaan gelombang Airy ini untuk gelombang pendek hanya dapat digunakan untuk tinggi gelombang yang sangat kecil. Pada perhitungan ini  $F(u, H) = -\partial(uH)/\partial x$  dan  $G(u, \eta) = -u \partial u/\partial x - g \partial \eta/\partial x$  dihitung dengan menggunakan metoda selisih hingga. Hasil perhitungan disajikan pada **Gambar 5.4**.

Seperti terlihat pada **Gambar 5.4**, model memberikan solusi yang stabil, hal ini terlihat pada kurva gelombang yang stabil pada eksekusi 9 x periode gelombang, sering terjadi ketidak stabilan kurva terjadi setelah eksekusi 3 atau 4 kali periode gelombang. Hal



**Gambar 5.5. Perbandingan antara teori gelombang linier dengan model**



Gambar 6.1. Posisi titik integrasi terhadap titik waktu (φ) perhitungan

ini dapat terjadi akibat metoda numeris (penyelesaian diferensial waktu) yang kurang baik. Selain itu perhitungan gelombang pendek dengan persamaan gelombang Airy adalah jauh lebih sulit daripada perhitungan gelombang panjang,

$$u^{t+\delta t} = u^t + \frac{\delta t}{12} (23 G^t - 16 G^{t+\delta t} + 5 G^{t+2\delta t})$$

$$\eta^{t+\delta t} = \eta^t + \frac{\delta t}{12} (23 F^t - 16 F^{t+\delta t} + 5 F^{t+2\delta t})$$

misal gelombang pasang surut dengan periode 24 jam atau 86400 detik.

$$u^{t+\delta t} = u^t + \frac{\delta t}{24} (9 G^{t+\delta t} + 19 G^t - 5 G^{t+2\delta t} + G^{t+2\delta t})$$

Solusi

$$\eta^{t+\delta t} = \eta^t + \frac{\delta t}{24} (9 F^{t+\delta t} + 19 F^t - 5 F^{t+2\delta t} + F^{t+2\delta t})$$

analitik

berdasarkan teori gelombang linier dapat ditulis dalam bentuk sinusoidal :  $\eta(x, t) = A \sin(kx - \sigma t)$

dimana :

$$A = \text{amplitudo}$$

$$u^{t+\delta t} - u^t = \int_t^{t+\delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int_t^{t+\delta t} f(u) dt$$

gelombang ;  $k = \int_t^{t+\delta t} f(u) dt$  bilangan gelombang  
 $\sigma = 2\pi / T = \text{frekuensi sudut}$  ;  $T = \text{periode gelombang}$

Untuk gelombang dengan periode 6 detik, dan pada kedalaman perairan 15.0 m, mempunyai panjang gelombang 53 m berdasarkan teori gelombang linier. Terlihat pada Gambar 5.5., bahwa gelombang yang dihasilkan model lebih panjang dari teori gelombang linier. Berdasarkan [Hutahaean, dkk., 2005], panjang gelombang dari teori gelombang linier memang masih perlu dilakukan koreksi.

### 6. Diskusi

Seperti telah disebutkan bahwa metoda yang dikembangkan adalah serupa dengan metoda Gaussian-quadrature yang berbentuk [Burden, Douglas, 1985]

dimana  $w_i$  disebut dengan koefisien bobot, sedangkan  $\xi_i^*$  adalah titik integrasi. Berdasarkan [Frank, 1986], titik integrasi pada metoda Gaussian-quadrature adalah seperti disajikan pada Tabel 6.1. Seperti terlihat pada Tabel 6.1. tersebut, koordinat titik integrasi bukan berupa bilangan yang sederhana, demikian juga dengan intervalnya. Sehingga untuk penggunaannya pada integrasi waktu sulit untuk mengkaitkannya

Tabel 6.1. Titik integrasi pada metoda Gaussian-quadrature

	$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i^*)$	
$\xi_i^*$		$w_i$
0.0000000000000000	n = 1	2.0000000000000000
$\pm 0.577350269189626$	n = 2	1.0000000000000000
0.0000000000000000	n = 3	0.8888888888888889
$\pm 0.774596669241483$		0.5555555555555556
$\pm 0.339981043584856$	n = 4	0.652145154862546
$\pm 0.861136311594053$		0.347854845137454
0.0000000000000000	n = 5	0.5688888888888889
$\pm 0.538469310105683$		0.478628670499366
$\pm 0.906179845938664$		0.236926885056189
$\pm 0.238619186083197$	n = 6	0.467913934572691
$\pm 0.661209389466265$		0.360761573048139
$\pm 0.932469514203152$		0.171324492379170

dengan posisi  $t_1, t_2, t_3, \dots$  dst. seperti terlihat pada **Gambar 6.1.**, maka terlihat bahwa titik integrasi tidak tepat berada pada titik waktu perhitungan.

Oleh karena itu bila digunakan metoda Gaussian-quadrature, perlu dilakukan interpolasi untuk menghitung harga-harga  $f(\xi_1^*), f(\xi_2^*), f(\xi_3^*), \dots$  dst. Hal ini selain menambah proses perhitungan juga akan mengurangi ketelitian. Metoda prediktor-korektor yang dikembangkan mirip dengan metoda prediktor-korektor dari Adams – Bashforth – Moulton yang digunakan oleh Y.S Li, dkk [Li, Liu, Yu, Lai, 1999] serta Nwogu [Nwogu, 1993] dalam menyelesaikan persamaan Boussinesq. Adapun bentuk persamaan dari Adams – Bashforth – Moulton tersebut adalah [Burden, Douglas, 1985], [Li, Liu, Yu, Lai, 1999], dan [Nwogu, 1993].

**Prediktor :**

**Korektor :**

Perbedaan dengan metoda yang dikembangkan adalah pada harga koefisien integrasi. Metoda Adams – Bashforth – Moulton ini juga diturunkan berdasarkan metoda integrasi, yaitu

Selanjutnya penyelesaian                      diselesaikan

metoda backward-difference dari Newton, dan diperoleh koefisien-koefisien integrasi. Untuk penjelasan lebih rinci, dapat dilihat pada ref [Burden, Douglas, 1985]. Mengenai metoda yang mana yang lebih baik, diluar lingkup penelitian ini. Maksud dari paper ini hanyalah mengemukakan alternatif metoda penyelesaian persamaan diferensial waktu nonlinier.

## **7. Kesimpulan**

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan bahwa

- a. Metoda integrasi numeris yang dikembangkan memberikan hasil yang cukup baik, sangat dekat dengan hasil eksak, dengan kesalahan 0.0002% - 0.5%.
- b. Semakin banyak titik polinomial atau titik integrasi yang digunakan diperoleh hasil integrasi yang semakin baik.
- c. Persamaan differensial waktu dapat diselesaikan dengan metoda integrasi, dimana integrasi waktu dapat dilakukan secara numeris.

